

# **De la Fondation aux Frontières : Construire une Analyse d'Attribution Robuste**

Décomposer la surperformance pour quantifier les décisions d'investissement actives.

# L'attribution de performance : un outil de gestion essentiel.



« N'essayez jamais de traverser une rivière simplement parce que sa profondeur moyenne est de quatre pieds. »

– Martin Friedman

Profondeur moyenne : 1.2m

L'attribution de performance est une technique utilisée pour quantifier la surperformance d'un portefeuille par rapport à son benchmark, en la décomposant selon les décisions actives du processus d'investissement.

L'analyse d'attribution est un outil clé pour comprendre et communiquer les sources de rendement. Elle est essentielle pour :



**Les analystes de performance :** Pour participer au processus d'investissement et démontrer leur valeur ajoutée.



**Les gestionnaires de portefeuille :** Pour obtenir une compréhension quantitative de leurs décisions, au-delà de l'intuition qualitative.



**La direction générale :** Pour superviser les gestionnaires de portefeuille et s'assurer que la valeur est ajoutée de manière cohérente.



**Les clients :** Pour établir un dialogue transparent sur les aspects positifs et négatifs de la performance récente.

# **La pierre angulaire : Le modèle de Brinson, Hood et Beebower (BHB).**

Les fondations de l'attribution de performance ont été établies par Brinson et al. (1985, 1986). Le modèle part du principe que le rendement total est la somme de ses parties.

## **Formules de base**

Rendement du Portefeuille ( $r$ ):

$$r = \sum_r (w_i * r_i)$$

Rendement du Benchmark ( $b$ ):

$$b = \sum_i (W_i * b_i)$$

où  $w$  = poids du portefeuille,  $W$  = poids du benchmark,  $r$  = rendement du portefeuille,  $b$  = rendement du benchmark pour chaque catégorie  $i$ .

Les deux décisions clés du gestionnaire:

### **1. Allocation d'actifs (Asset Allocation)**

Sur-pondérer ou sous-pondérer des catégories d'actifs par rapport au benchmark pour capter leur performance.

### **2. Sélection de titres (Security Selection)**

Sélectionner des titres spécifiques au sein de chaque catégorie pour surperformer l'indice de cette catégorie.

# Premier bloc : Isoler l'effet d'allocation d'actifs

## Méthodologie (Modèle BHB)

Pour mesurer la valeur ajoutée de l'allocation, on crée un fonds intermédiaire appelé “fonds semi-notionnel” (bS).

- Ce fonds applique les poids du portefeuille réel ( $w_i$ ) aux rendements des indices du benchmark ( $b_i$ ).
- Il capture donc les “paris” d'allocation du gestionnaire, sans aucun effet de sélection de titres.

Rendement du fonds semi-notionnel:

$$bS = \sum (w_i * b_i)$$

Effet d'Allocation Total:

$$bS - b$$

Contribution par catégorie ( $A_i$ ):

$$A_i = (w_i - W_i) * b_i$$

## Cas d'étude : Un portefeuille à trois catégories

Nous utiliserons cet exemple tout au long de la présentation.

Actif	Poids Portefeuille ( $w_i$ )	Poids Benchmark ( $W_i$ )	Rendement Portefeuille ( $r_i$ )	Rendement Benchmark ( $b_i$ )
Actions UK	40%	40%	20%	10%
Actions Japon	30%	20%	-5%	-4%
Actions US	30%	40%	6%	8%
<b>Total</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b><math>r = 8.3\%</math></b>	<b><math>b = 6.4\%</math></b>

**Surperformance arithmétique totale:**  
 $r - b = 1.9\%$

# Cas d'étude : Calcul de la contribution de l'allocation.

**Calcul du fonds semi-notionnel ('bS'):**

$$bS = (40\% * 10\%) + (30\% * -4\%) + (30\% * 8\%) = 5.2\%$$

**Effet d'Allocation Total:**

$$bS - b = 5.2\% - 6.4\% = \textcolor{green}{-1.2\%}$$

**Détail par catégorie** ( $A_i = (w_i - W_i) * b_i$ ):

Catégorie	Calcul	Résultat	Analyse
Actions UK	$(40\% - 40\%) * 10\%$	0.0%	*Poids neutre, donc aucune contribution.
Actions Japon	$(30\% - 20\%) * -4\%$	-0.4%	*Sur-pondération de 10% sur un marché baissier, créant une contribution négative.
Actions US	$(30\% - 40\%) * 8\%$	-0.8%	*Sous-pondération de 10% sur un marché haussier, créant une contribution négative.
<b>Total</b>		<b>-1.2%</b>	

**Conclusion partielle:** Les décisions d'allocation du gestionnaire ont coûté 1.2% de performance.

**Conclusion partielle:** Les décisions d'on du gestionnaire ont coûté 1.2% de performance.

# Deuxième bloc : Mesurer l'effet de sélection de titres.

## Méthodologie (Modèle BHB)

Pour mesurer la sélection, on utilise un autre fonds intermédiaire, le "fonds notionnel de sélection" ( $r_S$ ).

- Ce fonds applique les poids du benchmark ( $W_i$ ) aux rendements du portefeuille réel ( $r_i$ ).
- Il capture donc la performance des titres choisis par le gestionnaire, en neutralisant les paris d'allocation.

**Rendement du fonds notionnel de sélection:**

$$r_S = \sum (W_i * r_i)$$

**Effet de Sélection Total:**

$$r_S - b$$

**Contribution par catégorie (S<sub>i</sub>):**

$$S_i = W_i * (r_i - b_i)$$

## Application au cas d'étude :

Calcul du fonds notionnel de sélection ( $r_S$ ) pour notre cas d'étude:

$$r_S = (40\% * 20\%) + (20\% * -5\%) + (40\% * 6\%) = 9.4\%$$

# Le puzzle du modèle BHB : L'effet d'interaction.

## Synthèse des calculs (Modèle BHB):

- Effet d'Allocation Total: **-1.2%**
- Effet de Sélection Total:  $r_S - b = 9.4\% - 6.4\% = +3.0\%$

## Le problème:

Allocation (**-1.2%**) + Sélection (**+3.0%**) = **+1.8%**

... mais la surperformance totale est de **+1.9%**.

Il manque un troisième terme : l'**Interaction**.

## Définition de l'Interaction:

L'interaction capture l'effet combiné des décisions d'allocation et de sélection.

- **Formule (Ii):**  $I_i = (w_i - W_i) * (r_i - b_i)$

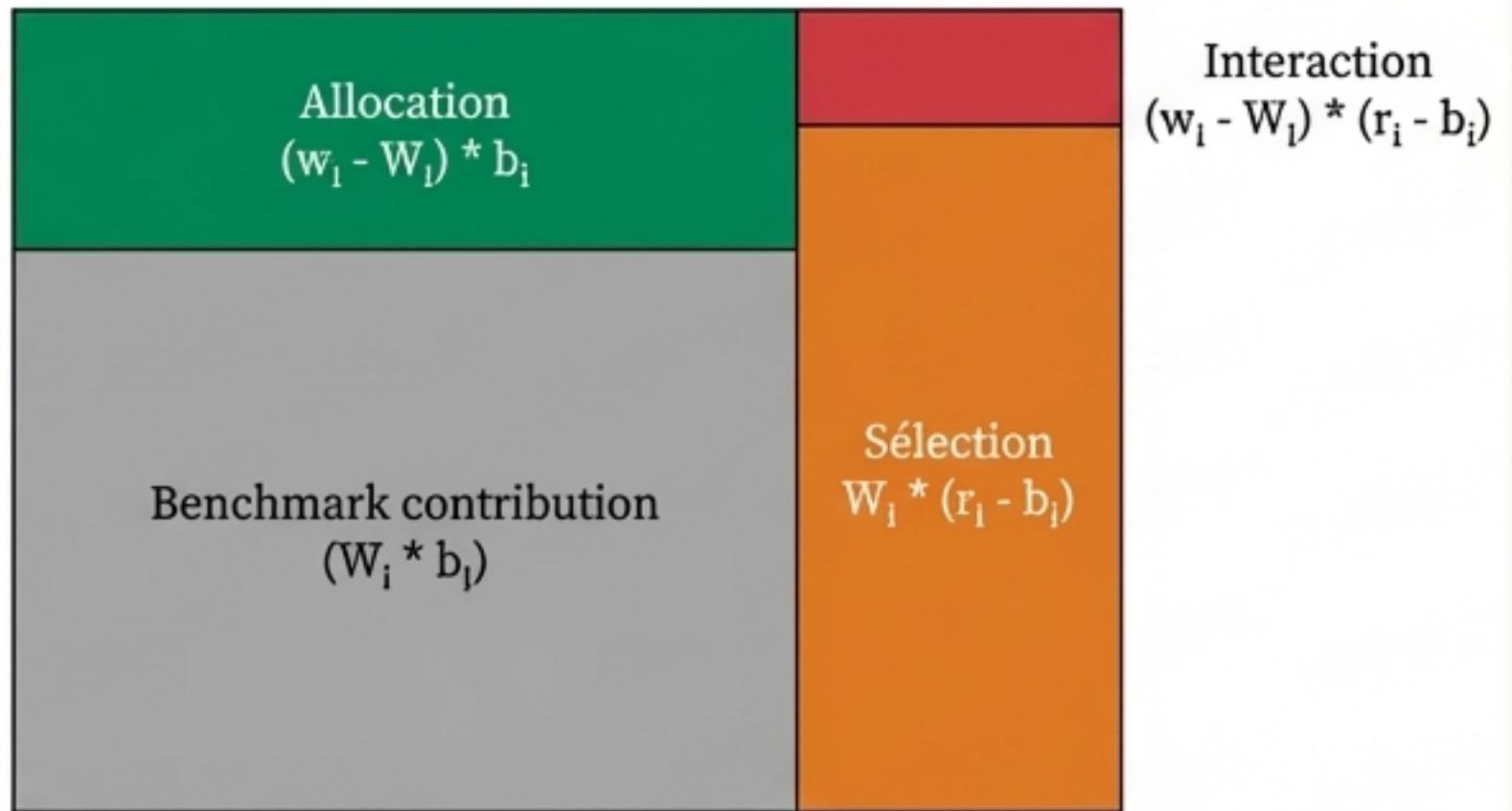


Figure 5.2. Effets d'attribution effects BHB.

## Synthèse complète de l'attribution BHB:

Catégorie	Allocation	Sélection	Interaction
Actions UK	0.0%	4.0%	0.0%
Actions Japon	-0.4%	-0.2%	-0.1%
Actions US	-0.8%	-0.8%	0.2%
Total	-1.2%	+3.0%	+0.1%

Vérification: **-1.2% + +3.0% + +0.1% = 1.9%**

# Premier perfectionnement : Le modèle de Brinson et Fachler.

## La critique du modèle BHB:

Le calcul de l'allocation  $((w_i - W_i) * b_i)$  est imparfait. Un gestionnaire n'est pas récompensé pour une sur-pondération sur un marché à rendement positif, mais pour une sur-pondération sur un marché qui **surperforme le benchmark global**.

## La solution de Brinson et Fachler:

L'effet d'allocation doit être calculé par rapport au rendement global du benchmark ( $b$ ).

$$A_i = (w_i - W_i) * (b_i - b)$$

Rendement de la catégorie par rapport au **benchmark total**.

Rendement de la catégorie par rapport au **benchmark total**.

## Logique:

Cette formule pénalise une sur-pondération dans un marché qui, bien que positif, sous-performe le benchmark global. Elle reflète plus fidèlement le processus de décision de l'allocateur d'actifs.

## Note importante:

L'effet d'allocation total reste inchangé ( $\sum A_i = bS - b$ ), mais sa répartition entre les catégories est modifiée de manière significative.

# Cas d'étude : L'impact du modèle Brinson-Fachler.

Benchmark total  $b = 6.4\%$

Nouveau calcul de l'allocation par catégorie ( $A_i = (w_i - W_i) * (b_i - b)$ ):

Catégorie	Allocation BHB	Calcul Brinson-Fachler	Allocation Brinson-Fachler
Actions UK	0.0%	$(40\%-40\%)*(10\%-6.4\%)$	<b>0.0%</b>
Actions Japon	-0.4%	$(30\%-20\%)*(-4\%-6.4\%)$	<b>-1.04%</b>
Actions US	-0.8%	$(30\%-40\%)*(8\%-6.4\%)$	<b>-0.16%</b>
<b>Total</b>	<b>-1.2%</b>		<b>-1.2%</b>

## Analyse de l'impact:

**Japon:** L'impact négatif est beaucoup plus important. En plus d'être sur-pondéré sur un marché en baisse (-0.4%), le gestionnaire a subi un coût d'opportunité en n'étant pas investi dans le benchmark benchmark global (+6.4%).

**États-Unis:** L'impact négatif est bien plus faible. Bien que sous-pondéré sur un marché en hausse, le gestionnaire a bénéficié d'un 'gain' d'opportunité par rapport au rendement global du benchmark.

**Le modèle Brinson-Fachler offre une vision plus juste des décisions d'allocation.**

# L'épuration du modèle : Éliminer l'effet d'interaction

## Le problème persistant

L'interaction n'est pas une décision d'investissement. Aucun gestionnaire n'est responsable de "générerer de l'interaction". C'est un résidu mathématique qui obscurcit l'analyse.

## La solution pragmatique

L'allocation d'actifs est généralement la première décision. L'effet de la sélection de titres doit donc être mesuré sur la base des poids **réellement alloués ( $w_i$ )**.

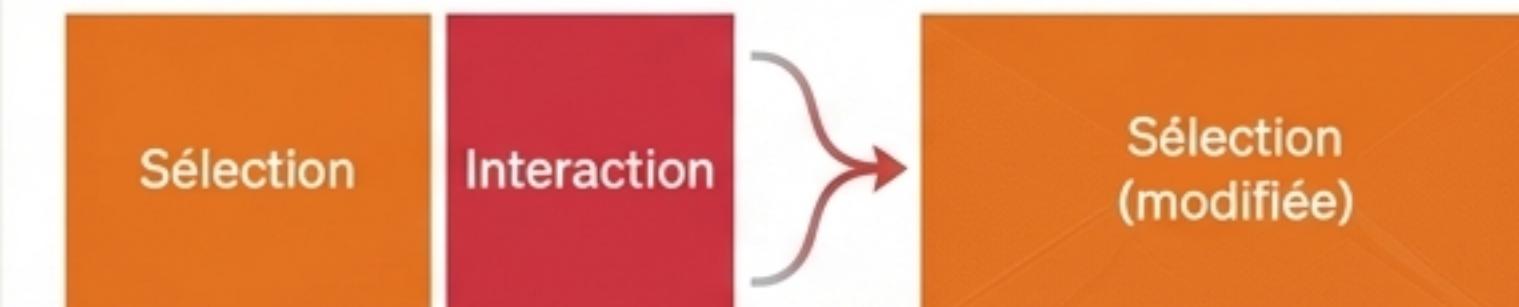
## Nouvelle formule de Sélection

Ancienne (BHB):

$$S_i = W_i \times (r_i - b_i)$$

Nouvelle (modifiée):

$$S_i = w_i \times (r_i - b_i)$$



## Le résultat

L'attribution se décompose désormais en deux facteurs clairs et mutuellement exclusifs : Allocation et Sélection. Il n'y a plus de résidu.

## Justification

Cette approche mesure la contribution réelle de la sélection de titres, compte tenu du capital alloué par le gestionnaire d'actifs. Le "stock picker" est jugé sur la performance au sein de sa catégorie, pondérée par son poids réel dans le portefeuille.

# Un cadre d'analyse arithmétique complet et intuitif.

Synthèse du modèle final (Brinson-Fachler modifié)

Allocation:  $(w_i - W_i) * (b_i - b)$

Sélection:  $w_i * (r_i - b_i)$

Catégorie	Allocation (Brinson-Fachler)	Sélection (modifiée)
Actions UK	0.0%	4.0%
Actions Japon	-1.04%	-0.3%
Actions US	-0.16%	-0.6%
<b>Total</b>	<b>-1.2%</b>	<b>+3.1%</b>

Allocation (-1.2%) + Sélection (+3.1%) = +1.9% (Surperformance totale)

Un meilleur modèle conceptuel : Les "Brinson Steps"



Ce modèle linéaire reflète le processus de décision et élimine l'interaction de manière naturelle.

# Au-delà de la période unique : Le défi de l'agrégation temporelle.

## La limite des modèles arithmétiques:

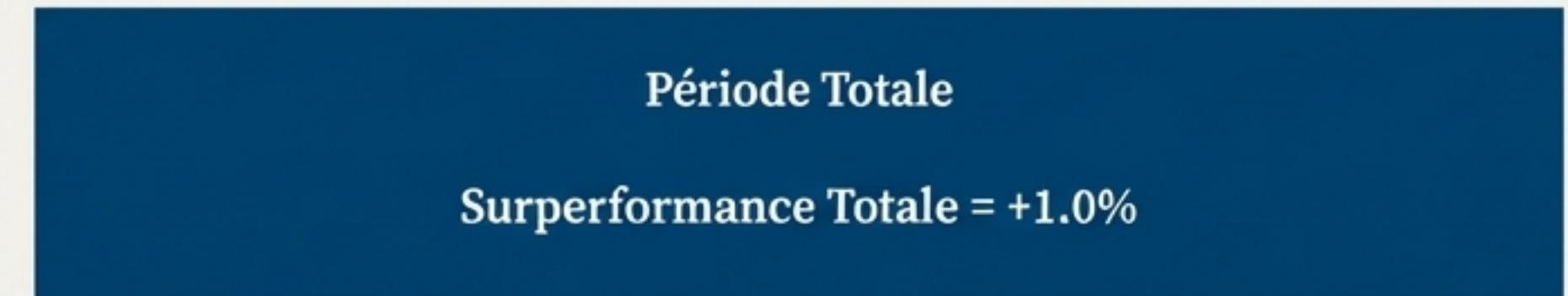
L'analyse sur une seule période est claire, mais que se passe-t-il sur plusieurs trimestres ou années ?



## Le problème fondamental du chainage (linking):

– Les rendements arithmétiques ne s'additionnent pas de manière composée. La somme des surperformances arithmétiques de chaque période n'est pas égale à la surperformance arithmétique de la période totale.

– Par conséquent, la somme des effets d'attribution (Allocation, Sélection) calculés pour chaque période n'expliquera pas la surperformance totale sur le long terme.



$$R_{total} - B_{total} \neq \sum (r_t - b_t)$$

L'enjeu (en bas): Comment agréger les résultats d'attribution de manière cohérente et mathématiquement juste sur plusieurs périodes ?

# Deux approches pour résoudre le problème de l'agrégation.



## Voie 1 : Les algorithmes de lissage arithmétique ('Smoothing Algorithms')

**Principe:** Accepter le cadre arithmétique et appliquer un facteur de lissage pour forcer les effets de chaque période à s'additionner correctement à la surperformance totale.

**Exemples:** Carino (1999), Menchero (2000), GRAP (1997).

**Fonctionnement (conceptuel):** Un facteur de pondération ( $k_t/k$  pour Carino) est appliqué aux effets d'attribution de chaque sous-période.

**Inconvénient :** Les résultats d'une période donnée (ex: T1) changent en fonction de la période d'analyse globale (T1-T2 vs T1-T4). C'est contre-intuitif et lourd à maintenir.



## Voie 2 : L'attribution géométrique

**Principe:** Changer de paradigme. Utiliser la surperformance géométrique  $(1+r)/(1+b) - 1$  qui, par nature, se compose parfaitement dans le temps.

**Formule clé:**  $(1+g_{\text{total}}) = \prod (1+g_t)$

**Avantage:** Les résultats d'une période sont définitifs et ne changent pas. L'agrégation est mathématiquement élégante et directe. Les effets (Allocation, Sélection) se composent également.

$$g = (1 + \textcolor{brown}{SG}) * (1 + \textcolor{green}{AG}) - 1$$

# L'attribution géométrique : une solution robuste et cohérente.

Adaptation du modèle Brinson au cadre géométrique: Les fonds notionnels ('bS') sont utilisés, mais les effets sont calculés comme des ratios.

Formules clés de l'attribution géométrique:

**Effet d'Allocation Géométrique Total (AG):**

$$(1 + bS) / (1 + b) - 1$$

**Effet de Sélection Géométrique Total (SG):**

$$(1 + r) / (1 + bS) - 1$$

AG:  $(1.052 / 1.064) - 1 = -1.13\%$  (similaire à -1.2% arithmétique)

SG:  $(1.083 / 1.052) - 1 = +2.95\%$  (similaire à +3.1% arithmétique)

Vérification de la composition:

$$(1 + AG) * (1 + SG) - 1 = (1 - 0.0113) * (1 + 0.0295) - 1 = 1.79\% \quad \checkmark = 1.79\%$$

Surperformance géométrique totale:  $(1.083 / 1.064) - 1 = 1.79\%$

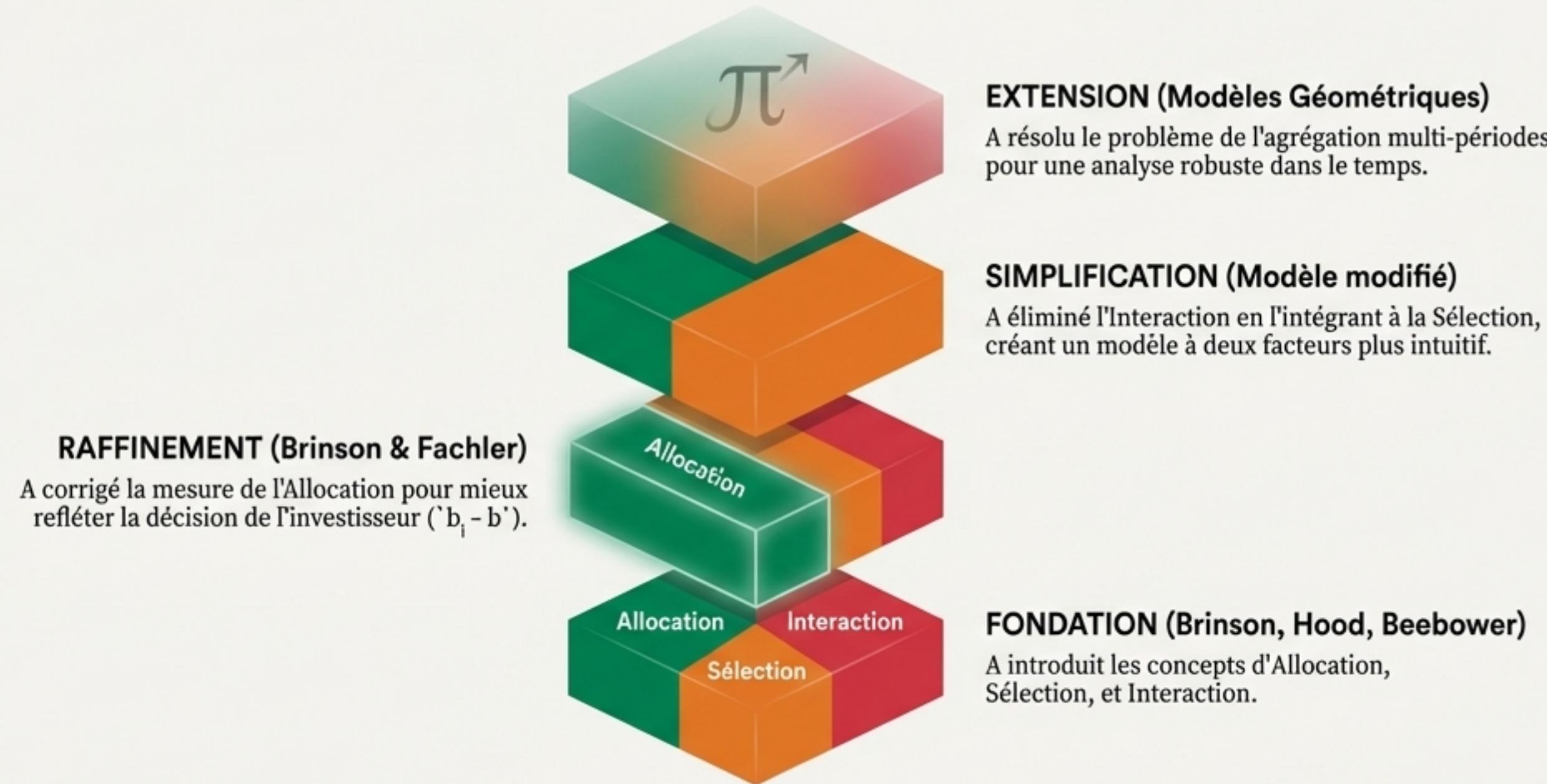
Conclusion: L'attribution géométrique décompose parfaitement la surperformance géométrique et est la base privilégiée pour une analyse multi-périodes.

Application au cas d'étude (1 période):

Indicateur	Valeur
Rendement Portefeuille ('r')	8.3%
Rendement Benchmark (b')	6.4%
Rendement Semi-Notionnel ('bS')	5.2%
<b>Effet d'Allocation Géométrique (AG)</b>	<b>-1.13%</b>
<b>Effet de Sélection Géométrique (SG)</b>	<b>+2.95%</b>

# L'architecture d'une analyse d'attribution moderne.

Notre parcours de construction:



## RAFFINEMENT (Brinson & Fachler)

A corrigé la mesure de l'Allocation pour mieux refléter la décision de l'investisseur (' $b_i - b$ ').

## EXTENSION (Modèles Géométriques)

A résolu le problème de l'agrégation multi-périodes pour une analyse robuste dans le temps.

## SIMPLIFICATION (Modèle modifié)

A éliminé l'Interaction en l'intégrant à la Sélection, créant un modèle à deux facteurs plus intuitif.

## FONDATION (Brinson, Hood, Beebower)

A introduit les concepts d'Allocation, Sélection, et Interaction.

### Conclusion clé:

Une attribution de performance de premier ordre doit non seulement décomposer la surperformance avec précision, mais aussi refléter fidèlement la décision d'investissement et être mathématiquement cohérente sur toutes les périodes d'analyse. Le modèle géométrique à deux facteurs (Allocation de type Fachler et Sélection modifiée) représente la norme d'excellence actuelle.